Aportaciones Matemáticas
Comunicaciones 17 (1996) 35–43.

IDENTIFICACION DE LA MANIPULACION MATEMATICA QUE CONVIERTE A UNA ECUACION CONSERVATIVA EN UNA NO CONSERVATIVA

Alistair Fitt, Faculty of Mathematical Studies
University of Southampton
Southampton SO9 SNH, England.

José Oscar Guerrero
Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
Paseo Cuauhnahuac 8532, Progreso,
62550 Jiutepec, Mor., México.

Rafael Morones
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
Río Hondo 1, Tizapán San Angel, 01000 México, D.F.

1. Introducción.

Es práctica común en la modelación de problemas donde se involucra el flujo de un material el partir de una forma general de la ecuación de conservación de momentum. Si durante el flujo no ocurren discontinuidades entonces la particularización de esa forma general a las condiciones del problema deviene en una ecuación diferencial que modela correctamente el problema en cuestión. Por otra parte, si el problema incluye una situación donde se viola la Hipótesis del Continuo, la práctica arriba descrita no necesariamente suministra una ecuación diferencial que correctamente lo modele. En estos casos lo recomendable es proponer un modelo específico a las condiciones del problema. El Problema 5 es un caso en cuestión. En este Problema se trata de modelar una situación donde existe una discontiuidad y para hacerlo se parte de una forma general la que sucesivamente se particulariza hasta llegar a una ecuación diferencial de donde se pueden obtener dos formas de la misma, aparentemente equivalentes que modelarían correctamente el mismo problema. En este reporte se discute porque una de ellas si modela correctamente el problema y la otra no. En adición, se propone también una formulación alternativa, específica al problema.

2. Hipótesis del Continum.

La hipótesis común a la modelación de una buena cantidad de problemas que ocurren en la práctica es la que afirma que la Naturaleza es un Continuum independientemente de que sea evidente la existencia de una estructura molecular. Esta hipótesis presume, de manera natural, que la variables que se utilizarán en la modelación son continuas, esto es que el continuo físico es isomorfo al continuo matemático, así a todo punto material corresponde un sólo punto matemático. El peso de esta hipótesis se hace evidente en la formulación de problemas donde no es posible establecer la continuidad de alguna de las variables, por ejemplo, en flujos donde ya no se cumple la suposición de que durante el movimiento partículas que son vecinas permanecen siéndolo durante el flujo; tampoco en flujos donde la escala geométrica característica del sistema es del mismo orden de magnitud que el de una partícula material.

3. Técnicas de Modelación.

En general existen dos maneras de plantear la modelación de un problema, sin embargo en ambas se hace amplio uso de principios conservativos. Así, para procesos donde no ocurren intercambios nucleares entre materia y energía se puede afirmar que la materia se conserva y que la Primera Ley de la Termodinámica describe con toda precisión los intercambios entre la energía interna, el calor y el trabajo, mientras que la conservación del momentum o momento lineal es una forma de expresar la Segunda Ley de Newton.

Las técnicas para plantear un problema son, entonces:

a) Definir un Sistema.

En este caso se define una configuración inicial, esto es, se etiqueta un número grande de puntos materiales respecto a un sistema de referencia previamente acordado y se observan los cambios de posición relativa o de la propiedad que se desee evaluar en la medida que transcurre el flujo (o que transcurre el tiempo).

Este punto de vista es muy útil en la formulación de ecuaciones generales de cambio [Aris, 1962] , al igual que para el desarrollo de ecuaciones reológicas de estado, ya que en estos casos la modelación consistiría en determinar sistemas de referencia convectivos en el material, es decir que se deforman y se mueven en la misma manera como lo hace el material durante el flujo [Lodge, 1974].

b) Volumen de Control.

Esta técnica es una herramienta de lo más útil por la claridad de su aplicación a la vez que flexible, ya que permite establecer desde ecuaciones generales de cambio hasta la formulación de problemas concretos [Fox, *et-al*, 1978]. De hecho, una de las aportaciones más notables al análisis de procesos basada en esta técnica es la de R. B. Bird *et-al* [Bird, *et-al*, 1960] quienes incorporan a la teoría una descripción de los mecanismos que inducen el transporte de alguna propiedad. Esta técnica será usada para la modelación de un salto hidráulico estacionario como se describe a continuación.

4. El Problema. Solución Alternativa.

El problema al que se refiere Guerrero [Guerrero, 1995] es el de modelar un salto hidráulico estacionario que ocurre en un canal y que se describe en la Figura 1. Naturalmente en la región donde ocurre el salto existe una discontinuidad en el sentido de que se rompen las sucesiones de puntos materiales por lo que las variables dinámicas y termodinámicas dejan de ser continuas.

El volumen de control se escoge de manera que el contorno incluya regiones donde las **variables sean continuas**. Las ecuaciones a integrar son las que resultan de suponer la conservación de materia y de momentum. Las hipótesis que satisface el flujo son:

H1 Flujo estacionario. Las variables son independientes del tiempo.

H2 El vector velocidad referido al sistema de coordenadas que aparece en la Figura 1 es

$$v = \langle u, 0, 0 \rangle \tag{1}$$

si se desprecian los efectos de borde entonces se puede considerar a u como uniforme en la dirección y .

H3 En las posiciones (1) y (2) del volumen de control existe una distribución de presión hidrostática, lo que implica que:

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g$$

donde ρ es la densidad y es constante. La ecuación se integra y se tiene:

$$p = p_{atm} + \rho g(D - y) \tag{2}$$

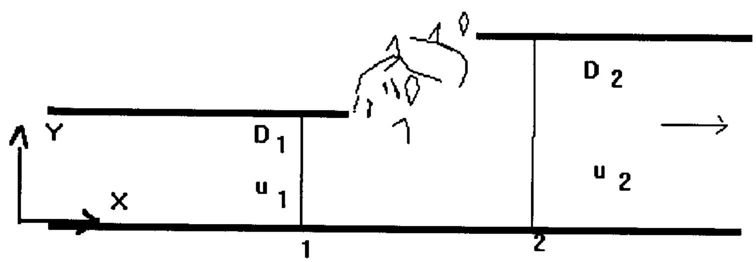

Figura 1.

a) Conservación de Materia.

De H1 se tiene que la ecuación de conservación de masa se reduce a:

$$\int_{CS} \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{da} = 0$$

desarrollando esta expresión para el volumen de control:

$$\int_{CS} \rho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{da} = -\int_0^{D_1}\int_0^{w} \rho u\, dz\, dy + \int_0^{D_2}\int_0^{w} \rho u\, dz\, dy = 0$$

lo que resulta en:

$$\rho u_1 D_1 w = \rho u_2 D_2 w \tag{3}$$

donde:

los subíndices se refieren a la sección del volumen de control,
$w = cte$ es el ancho del canal

la que simplemente implica:

$$u_1 D_1 = u_2 D_2 \tag{4}$$

b) Conservación de Momentum.

El balance fuerzas en la dirección x resulta en la ecuación:

$$F_x = F_{Sx} + F_{Bx} = \int_{CS} \rho u\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{da}$$

donde:

F_{Sx} es la resultante en la dirección x de las fuerzas de superficie que actuan sobre el volumen de control y que en este caso se trata de la presión que ejerce el fluido sobre las caras en las posiciones (1) y (2) del volumen de control, y de la presión atmosférica sobre la superficie libre.

F_{Bx} es la resultante en la dirección x de las fuerzas globales (volumétricas) que actuan sobre el volumen de control. En este caso sólo se considera la fuerza de gravedad, por lo que:

$$F_{Bx} = 0$$

Entonces:

$$F_{Sx} = \int_0^{D_1} p_1\, dA_1 - \int_0^{D_1} p_1\, dA_1 + p_{atm}(D_2 - D_1)$$

$$F_{Sx} = \int_0^{D_1} [p_{atm} + \rho g(D_1 - y)] w\ dy - \int_0^{D_2} [p_{atm} + \rho g(D_2 - y)]\, w\, dy$$
$$+ p_{atm}(D_2 - D_1)$$

Finalmente:

$$F_{Sx} = \frac{\rho g w}{2}\left(D_1^2 - D_2^2\right) \tag{5}$$

Por otra parte, el término del lado derecho es:

$$\int_{\text{CS}} \rho u\, v \cdot dA = -\rho u_1^2 \int_0^{D_1} w\, dy + \rho u_2^2 \int_0^{D_2} w\, dy$$
$$= \rho w\left(u_2^2 D_2 - u_1^2 D_1\right) \tag{6}$$

Por lo que igualando las ecuaciones (5) y (6) se tiene:

$$\frac{\rho g w}{2}\left(D_1^2 - D_2^2\right) = \rho w\;(u_2^2 D_2 - u_1^2 D_1) \tag{7}$$

Esta ecuación se combina con la ecuación (4) y después de llevar a cabo algunas simplificaciones algebraicas evidentes se tiene el siguiente resultado intermedio:

$$D_2 + D_1 = \frac{2}{g}\,u_1^2\,\frac{D_1}{D_2} \tag{8}$$

Después de completar cuadrados y simplificar se llega al resultado deseado:

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\,Fr_1} - 1\right)$$

5. El Problema. Solución a Discusión.

La modelación del salto hidráulico también se puede llevar a cabo desde un punto de vista más general mediante la técnica del volumen de control. En este caso, las hipótesis simplificatorias de la ecuación diferencial parcial resultante se incorporan sobre la marcha. Así, en la propuesta de solución [Guerrero, 1995] se tiene la ecuación (45) la que se transcribe a continuación

$$\rho A_x\,\frac{\partial u}{\partial t} + \rho q\,\frac{\partial \beta u}{\partial x} + g\,\frac{\partial \rho A_x Y}{\partial x} = \rho g A_x(sen\theta - S_f) - (\beta - 1)u\frac{\partial \rho q}{\partial x} \tag{45}$$

Considerando:

- Regimen estacionario.
- Densidad constante.
- Velocidad uniforme.
- $\beta \approx 1$
- $S_f = 0$
- $\theta = 0$
- $q = uA_x = cte$
- Y distancia vertical desde la línea piezométrica al centroide de área A_x
- $Y = \delta cos\,\theta$ para canales (sección transversal constante A)
- δ distancia de la superficie del agua al centroide, perpendiculara la línea del fondo del canal.

y la ecuación (45) se simplifica a:

$$\rho q\frac{du}{dx}+\rho g\frac{dA\delta}{dx}=0$$

cuya integración deviene en :

$$q_1u_1+\frac{g}{2}A_1D_1=q_2u_2+\frac{g}{2}A_2D_2$$

en la que después de sustituir q y rearreglar, se tiene una expresión equivalente a la ecuación (8):

$$\frac{g}{2}(D_1^2-D_2^2)=u_2^2D_2-u_1^2D_1$$

de la que finalmente se obtiene el resultado esperado.

La misma ecuación se puede escribir también como:

$$\rho A_x\frac{\partial u}{\partial t}+\rho A_x u\frac{\partial \beta u}{\partial x}+\rho g cos\theta\frac{\partial \delta}{\partial x}=\rho g A_x(sen\theta-S_f)-(\beta-1)\rho u\frac{\partial q}{\partial x} \tag{56}$$

en donde el término $q=cte$ ha sido reemplazado por uA_x.

Aquí:

$$q=u_1A_1=u_2A_2$$

no implica la variación suave de uA de una sección del salto hidráulico a la otra.

Bajo la aplicación de las mismas hipótesis que para la ecuación anterior se llega ahora al resultado:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right)+\frac{d\delta}{dx}=0$$

cuya integración deviene en una expresión incorrecta. Las razones por las cuales sucede esto son las siguientes:

- Aunque inicialmente se tiene una expresión donde se pretende la conservación de momentum, la ecuación diferencial que finalmente se integra tiene como argumento a la energía cinética $(\frac{u^2}{2g})$, contradiciendo esa intención.

- El artificio matemático con el que se logra ese cambio en el argumento de la ecuación diferencial pretende que la función u siga siendo continua precisamente en la región donde ocurre el salto hidráulico, región donde esta hipótesis no es sostenible.

6. Conclusiones.

Dos comentarios son relevantes en este problema:

Siempre que sea posible, es más conveniente obtener la ecuación diferencial que modela un problema, mediante la técnica del volumen de control aplicado a las condiciones específicas del mismo, que a partir de una expresión muy general. Para una discusión más amplia de este punto punto ver por ejemplo [Fox, *et-al*, 1978] y [Douglas, 1967].

La vigilancia de las regiones de flujo o de las condiciones del problema donde sea aplicable la Hipótesis del Continuo reditua en la eliminación de suposiciones que puedan conducir a errores en los resultados. Un punto análogo se podría enfatizar con respecto a mostrar congruencia en el principio conservativo que se pretende aplicar, esto es, si en algún problema se aplica el principio de conservación de momentum, la ecuación diferencial resultante debe tener como argumento al momento lineal.

7. Bibliografía.

1960
R.B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot
Transport Phenomena.
John Wiley.

1962
R. Aris.
Vectros, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics.
Prentice Hall.

1967
J. F. Douglas.
Solution of Problems in Fluid Mechanics.
Pitman Paperbacks.

1974
A. S. Lodge.
Body Tensor Fields in Contunuum Mechanics.
Academic Press.

1978
R. W. Fox, A. T. McDonald.
Introduction to Fluid Mechanics.
John Wiley. 2nd Edition.

1995
José Oscar Guerrero A.
Problema para el Taller de Oaxaca.
Matemáticas en la Industria.