

水环境保护的数学模型与应用

概要

本模型致力于,对已有的上海河流流量的计算机模型,提出适当的改进,以便考察分布于该地区的许多很小的支流所起的作用。目前,这些支流仅作为一种向河流中添加废水的分布式的工业污染源。这是它们目前在流量的动力机制中所唯一起到的作用。此外也讨论了该模型的其它可能可以改进的方面。

在一星期的研究会上取得了相当大的进展,并提出了以下的建议:

- 应该将模型在上游的高度边界条件改为流量边界条件。这一流量应该是在太湖流入口测量的流量与农村地区排水流入量之和。这将显著改变预测流量;
- 废水排放流量 q_i 应该在空间上做分布式处理,以便考察城市和农村地区不同的排水条件;
- 应该实施一下“零阶模型”,其中,假设局部范围,支流是在是与邻近的河流有相同的水深高度,因为这将显著地改变河流中的质量流动;
- 应该对近似的污染聚集方程做一个系统的推导,以便查明是否有可能导出这个模型的一个类似的简单的推广;
- 应该研究支流和地下水位间水的相互作用所产生的影响。这可以同时修改进入支流的稳定流动以及潮汐引起的动力运动。

模型方程组

描述河道中流动的方程组是平均深度，且沿河道方向是一维的。方程可写为：

质量守恒

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l \quad (1)$$

动量守恒

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial Z}{\partial x} + gn^2 \left| \frac{Q}{A} \right| \frac{Q}{R^{4/3}} = q_l v_x \quad (2)$$

其中 $Q(x, t)$ 和 $Z(x, t)$ 是未知量，分别表示河道中，水的体积流量和河水表面距一个固定参照物（一般取为海平面）的高度。模型的数据有： $A(Z, x)$ ，表示河道中每一点处，水的横截面的面积，它是水面高度的函数； q_l ，单位长度通过河岸流进河道的水的体积流量； g ，重力加速度常量； n ，河道摩擦的 Manning 系数（通常为 0.02）； $R(A, x)$ ，河道的水力半径（通常取为 A 除以河道表面宽度的商）。最后， v_x ，沿着河道方向侧面流进的水的速度（通常取为零，尤其是因为排放是垂直于河内的流动）。

我们再给这个方程组加上边界条件和初始条件。对于我们所感兴趣的潮汐河流，水的流动速度至少比波的速度快（Froude 数小于 1，或条件 $Q^2/(gA^2H) < 1$ 处处成立，其中 H 是水的深度）。因而，特别地在河道的一端水的高度已知（表示来自另一部分水，亦即海洋，的强迫力），在区域的其它端点，我们加上流量条件，河道在此堵死或是有来自湖泊的水流入。形式上对 Z 和 Q 需要加初始条件，但是，我们希望方程组最终将得到的解对初始条件是相对不敏感的。

目前这个基于计算机的模型，在河流的 74 个分段中，考察这些偏微分方程组（包含苏州河及六个主要支流）。在交汇处我们认

为, 各支流的水位相同, 水体积流量守恒。在引言的综述中所提及的事项表明, 有必要将模型推广, 以便那些众多的小支流。由于这些支流的数目超过 3000 条, 显然不可能将基于计算机的模型扩大到这个规模。此外, 这些小支流在物理方面的大小又刻画得不好, 因而必须以某种适当的平均方式来包含它们。这正是本研究课题的目标。

一般性讨论

目前的模型大致覆盖了苏州河 55 公里的长度, 从与黄浦江的交汇处开始, 穿过市区, 向外深入到农村地区。模型目前在黄浦江的苏州河口设置了潮汐条件, 在上游点设置了水位高度条件。我们知道并指出过这个上游条件可能不精确。为了更精确地表达从湖泊及农村地区流入河道的水流最好在此点设置流量条件。

为了得到一个更精确的水流模型, 对 q_l 的估计是基于上海地区已知的水的消耗量来作的 (假设全部被消耗的水都作为废水排放进河道)。没有考虑降水条件, 沿着每一段水道, 我们寻求一个我们能够确定的平均值。在计算 q_l 时, 必须注意, 农村地区的排放量远比城市地区少。因此我们期望, 在上海市区有:

陆地表面积 - $9 \times 10^8 \text{m}^2$ (合 $30\text{km} \times 30\text{km}$)

废水排放量 - $7 \times 10^2 \text{m}^3/\text{秒}$ (合 $20\text{Gm}^3/\text{年}$)

单位陆地面积河道长 - $7 \times 10^{-3} \text{m}/\text{m}^2$ (合 $7\text{km}/\text{km}^2$)

因此, 我们发现:

$$q_l = \frac{7 \times 10^2}{9 \times 10^8 \cdot 7 \times 10^{-3}} = 10^{-4} \text{m}^3/\text{sec}/\text{m}$$

农村地区的流量值估计未予确定, 但应该小得多。

无量纲化

为了确定 (1) 和 (2) 中各分离项的重要性, 变量将用相应的参考长度、时间等做放大收缩。为了得到这些参考值, 我们假设河道是长方形的, 其宽为 W , 因此, $A = WZ$. 我们将认为河道受到一个给定潮汐高度的强迫作用, 记为:

$$F(t) = h_0 + a \cos(\omega t) \quad (3)$$

其中, h_0 是河道的平均深度, a 是潮汐偏移量, ω 是潮汐频率 ($2\pi/12\text{hrs}$). 对这些参数, 我们将在河流系统的不同部分用不同的数值。

现在将问题无量纲化。无量纲的变量用上加横杠表示, 它们是:

$$x = \sqrt{gh_0} \bar{x} \quad t = (1/\omega) \bar{t} \quad (4)$$

$$Z = h_0 \bar{Z} \quad A = Wh \bar{Z} \quad Q = aW\sqrt{gh_0} \bar{Q}.$$

此处, x, t 及 Q 的尺度是与潮汐运动相联系的, 潮汐的传播速度是 $\sqrt{gh_0}$.

利用 (4) 中的放大收缩, 方程 (1) 和 (2) 变成 (为简便起见, 我们忽略横杠记号):

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{q_i}{Wa\omega} \quad (5)$$

$$\frac{a}{h_0} \frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\frac{a}{h_0}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{Z}\right) + Z \frac{\partial Z}{\partial x} + \lambda_f Z^{-7/3} |Q| Q = 0 \quad (6)$$

其中

$$\lambda_f = n^2 a^2 g^{3/2} h_0^{-17/6} \quad (7)$$

是无量纲摩擦系数。

在上海河流系统的各个部分，我们都对 (5) 和 (6) 中的无量纲系数作了估计。表 1 给出了与河流系统的四个主要部分有关的物理数据。四行分别代表了黄浦江 (HP)、苏州河 (SC)、苏州河的六个主要支流 (SCMT)、以及苏州河众多的子支流 (SCST)。表 2 给出了四个主要部分的最终的无量纲参数。

表 1. 河流系统各部分近似物理值

	a	h_0	W
HP	2m	15m	
SC	1m	5m	
SCMT	1m	4m	3m
SCST	0.5m	1m	1m

表 2. 河流系统各部分无量纲参数值

	HP	SC	SCMT	SCST
a/h_0	1/7	1/5	1/4	1/2
$q_i/(Waw)$	0	0	0	7/10
λ_f	1/10	1	3	21

可以看出，对黄浦江来说，摩擦是不重要的，主要的影响是一个小的潮汐偏移量以及一个大的河水深度。对苏州河来说，摩擦是重要的，虽然潮汐偏移量相对来说仍然偏小。在两类支流中，摩擦显得很关键，对小支流来说，废水的流入显得重要。

为了在小支流中将这些影响的相对重要性做一个更仔细的量化，我们现在将它们分开做一个细致的考察。

小支流的动力细节

在支流模型中考察的是长方形的河道，宽度都相同，河床是水平的。河的一端认为是堵死的（这可以看成为在一个2倍长的河道上的对称条件），河的另一端水位高度的变化是给定的 $F(t)$ 。模型的目的是利用 $F(t)$ 导出最终流进河道的水流量。

与前一节中的相反，这些支流相对来说长度都短。因此，考察一个长为 L 、宽为 W 的河道。典型地，这些支流的长度约为1-2公里、宽度约为1-2米。河道内的水大约有1米深，在一个典型的12小时潮汐周期内，水深可以在这个平均深度左右0.5米的范围内摆动。因此，可取 $F(T) = hf(\omega t)$ ，其中 f 是其自变量的一阶函数， $h \approx 1$ 米。

现在将问题无量纲化，取

$$x = L \bar{x} \quad t = (1/\omega) \bar{t}$$

$$Z = h \bar{Z} \quad A = Wh \bar{Z} \quad Q = hWL\omega \bar{Q}$$

无量纲化问题即为：

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{q_1}{Wh\omega} \quad (8)$$

$$\alpha \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{Z} \right) \right) + Z \frac{\partial Z}{\partial x} + \beta Z^{-7/3} |Q| Q = 0 \quad (9)$$

其中有3个无量纲参数：

$$\alpha = \frac{L^2 \omega^2}{hg} \quad \beta = \frac{n^2 L^3 \omega^2}{hW^{4/3}} \quad \frac{q_1}{Wh\omega}$$

利用表1中的数据可知 $\alpha \approx 2 \times 10^{-3}$ ， $\beta \approx 10^{-2}$ 及 $\frac{q_1}{Wh\omega} \approx 1.5$ 。

利用前两个参数的数值很小的性质,可以得到一个小支流的简单模型。最低阶的问题是:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{q_i}{Wh\omega} \quad (10)$$

$$Z \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

由于与重力波的输入波长相比,河道的长度很小,这个模型所相应的情形是,假定流体注满河道所用的时间很少。因此,摩擦力的作用时间很短,所起的影响也就可以忽略。支流中的水几乎是平的并随着主要支流中的水而作上下运动。注意,如果支流更加浅 ($h \ll 1m$), 或更加长 ($L \gg 1km$), 那么这种近似就将不成立,这只要看一下 β 对这些参数的依赖关系就可知道。

因此,这个简单模型告诉我们,假如在与主要支流的交汇处,水位高度为 $F(t)$, 则来自小支流的水流量将是

$$Q_{st} = B \frac{dF}{dt} + C \frac{q_i}{Wh\omega} \quad (12)$$

其中, B 是与主要支流相应的小支流的表面积, C 是小支流的长度。通过所做的估计显示 $B \approx 7 \times 10^3 m^2$ 以及 $C \approx 7 \times 10^3 m$ 。

现在主要支流的模型可改进为

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -Q_{st} \quad (13)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial Z}{\partial x} + gn^2 \left| \frac{Q}{A} \right| \frac{Q}{R^{4/3}} = \quad (14)$$

这极大地改进了系统的性态, 因为 Q_{st} 比 $\partial A / \partial t$ 更大 (它俩都正比于 $\partial Z / \partial t$)。因而值得细心地去做 B 和 C 的精确的估计, 它们是沿着苏州河的位置函数。此外, 可能也值得对一个典型的小支流做一

个更精确的描述，使其中的截面面积不再是长方形，而是随 Z 变化得更加剧烈。

其它影响

研究小组没有考虑污染的流动。此处所采取的方法可用来观察支流在污染聚集中的作用。小支流中由于潮汐运动引起的弥散可能足够的快，以致于小支流得以充分混合，从而具有几乎是处处相同的聚集程度。如果真是这样的话，就可能做一个与水的流动相似的简单模型。

在我们的上海河流系统建模中，有一部分内容与河流和下面的地下水位间的相互作用有关，但这部分内容未能更深入地研究。我们知道在上海的大部分地区，地下水位位于离地面约 1 米深的地方，这样就使得河流系统（特别是那些众多的小支流，它们有大片相应的湿润的地表面积）中的水有可能从地下水位中得到或失去水。此外，这种相互作用可能是动态的，因为支流中的潮汐流动会使水的压力随潮汐的时间周期尺度而变化，而这可能引起流出和流进地下水位的水流的显著的摆动。这种作用可用上海地下的淤泥的渗透度和多孔度的数据来量化。此外，由于地下水位的变动，可能有季节性的影响，就象降雨的影响一样。

(Colin Please、Ellis Cumberbatch、严金海整理)